

Apéndice A

DEMOSTRACIONES DE TEOREMAS SELECCIONADOS

En este apéndice proporcionamos las demostraciones de teoremas seleccionados en el cuerpo del texto. Se presentan resultados que no se demostraron en el desarrollo de los temas por diversas razones.

Los primeros resultados requieren la definición formal de límite (ε - δ), que no se analizó sino hasta la sección 1.6. En vista de lo que hicimos en esa sección, ahora estamos en condiciones de demostrar tales resultados. El primero de ellos se refiere a nuestras reglas de rutina para calcular límites y apareció como el teorema 3.1 en la sección 1.3.

TEOREMA A.1

Supongamos que tanto $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ como $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existen y que c es cualquier constante. Entonces lo siguiente es verdadero:

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x),$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x),$
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \left[\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right]$ y
- (iv) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (\text{si } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0).$

DEMOSTRACIÓN

(i) Puesto que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$, sabemos por la definición precisa de límite que, dado cualquier número $\varepsilon_1 > 0$, hay un número $\delta_1 > 0$ para el cual

$$|f(x) - L_1| < \varepsilon_1, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_1. \quad (\text{A.1})$$

Para demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, debemos demostrar que podemos hacer que $cf(x)$ esté tan cerca de cL_1 como se desee. En primer lugar, note que

$$|cf(x) - cL_1| = |c||f(x) - L_1|.$$

Ya sabemos que es posible hacer que $|f(x) - L_1|$ sea tan pequeño como se desee. Específicamente, dado cualquier número $\varepsilon_1 > 0$, hay un número $\delta_1 > 0$ para el cual

$$|cf(x) - cL_1| = |c||f(x) - L_1| < |c|\varepsilon_1, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_1.$$

Si tomamos $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|c|}$ y $\delta = \delta_1$, obtenemos

$$|cf(x) - cL_1| < |c|\varepsilon_1 = |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Lo anterior indica que $\lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = cL_1$, como se deseaba.

(ii) Del mismo modo, dado que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$, sabemos que, dado cualquier número $\varepsilon_2 > 0$, hay un número $\delta_2 > 0$ para el cual

$$|g(x) - L_2| < \varepsilon_2, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_2. \quad (\text{A.2})$$

Ahora, para verificar que

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2,$$

debemos demostrar que, dado cualquier número $\varepsilon > 0$, hay un número $\delta > 0$ tal que

$$|[f(x) + g(x)] - (L_1 + L_2)| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

$$\begin{aligned} \text{Observe que } |[f(x) + g(x)] - (L_1 + L_2)| &= |[f(x) - L_1] + [g(x) - L_2]| \\ &\leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2|, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

debido a la desigualdad del triángulo. Por supuesto, los dos términos en el lado derecho de (A.3) se pueden hacer arbitrariamente pequeños, a partir de (A.1) y (A.2). En particular, si tomamos $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$, entonces siempre y cuando

$$0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{y} \quad 0 < |x - a| < \delta_2,$$

obtenemos de (A.1), (A.2) y (A.3) que

$$\begin{aligned} |[f(x) + g(x)] - (L_1 + L_2)| &\leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

como se deseaba. Esto ocurrirá si tomamos

$$0 < |x - a| < \delta = \min[\delta_1, \delta_2],$$

donde $\delta = \min[\delta_1, \delta_2]$ significa simplemente que δ es el menor entre δ_1 y δ_2 . (Reconozca que, si $0 < |x - a| < \delta = \min[\delta_1, \delta_2]$, entonces $0 < |x - a| < \delta_1$ y $0 < |x - a| < \delta_2$).

(iii) En este caso, debemos demostrar que, para cualquier $\varepsilon > 0$ dado, podemos encontrar un $\delta > 0$, tal que

$$|f(x)g(x) - L_1L_2| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Entonces, el objeto es hacer $|f(x)g(x) - L_1L_2|$ tan pequeño como sea necesario. Note que tenemos

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - L_1L_2| &= |f(x)g(x) - g(x)L_1 + g(x)L_1 - L_1L_2| \\ &= |[f(x) - L_1]g(x) + L_1[g(x) - L_2]| \\ &\leq |f(x) - L_1||g(x)| + |L_1||g(x) - L_2|, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

por la desigualdad del triángulo. Ahora, note que podemos hacer que $|f(x) - L_1|$ y $|g(x) - L_2|$ sean tan pequeños como deseemos. Si hacemos que ambos términos en (A.4) sean menores que $\frac{\varepsilon}{2}$, entonces la suma será menor que ε , como se deseaba. En particular, sabemos que hay un número $\delta_2 > 0$, tal que

$$|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2|L_1|}, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_2,$$

suponiendo que $L_1 \neq 0$, de modo que

$$|L_1||g(x) - L_2| < |L_1|\frac{\varepsilon}{2|L_1|} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $L_1 = 0$, entonces

$$|L_1||g(x) - L_2| = 0 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por lo que, sin importar el valor de L_1 , tenemos que

$$|L_1||g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_2. \quad (\text{A.5})$$

Observe que el primer término en (A.4) es un poco más complicado, dado que también debemos estimar el tamaño de $|g(x)|$. Note que

$$|g(x)| = |g(x) - L_2 + L_2| \leq |g(x) - L_2| + |L_2|. \quad (\text{A.6})$$

Como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$, hay un número $\delta_3 > 0$, tal que

$$|g(x) - L_2| < 1, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_3.$$

A partir de (A.6), ahora tenemos que

$$|g(x)| \leq |g(x) - L_2| + |L_2| < 1 + |L_2|.$$

De regreso al primer término en (A.4), tenemos que, para $0 < |x - a| < \delta_3$,

$$|f(x) - L_1||g(x)| < |f(x) - L_1|(1 + |L_2|). \quad (\text{A.7})$$

Ahora, puesto que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$, dado cualquier $\varepsilon > 0$, hay un número $\delta_1 > 0$ tal que, para $0 < |x - a| < \delta_1$,

$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |L_2|)}.$$

Entonces, a partir de (A.7), tenemos

$$\begin{aligned} |f(x) - L_1||g(x)| &< |f(x) - L_1|(1 + |L_2|) \\ &< \frac{\varepsilon}{2(1 + |L_2|)}(1 + |L_2|) \\ &= \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

siempre que $0 < |x - a| < \delta_1$ y $0 < |x - a| < \delta_3$. Junto con (A.4) y (A.5), esto nos dice que, para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - L_1L_2| &\leq |f(x) - L_1||g(x)| + |L_1||g(x) - L_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que demuestra (iii).

(iv) Primero demostramos que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2},$$

para $L_2 \neq 0$. Note que en este caso debemos demostrar que podemos hacer $\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2} \right|$ tan pequeño como se desee. Tenemos

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2} \right| = \left| \frac{L_2 - g(x)}{L_2 g(x)} \right|. \quad (\text{A.8})$$

Por supuesto, dado que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$, podemos hacer que el numerador de la fracción del lado derecho sea tan pequeño como se desee. Sin embargo, también debemos considerar lo que sucede con el denominador. Recuerde que, dado cualquier $\varepsilon_2 > 0$, hay un $\delta_2 > 0$ tal que

$$|g(x) - L_2| < \varepsilon_2, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_2.$$

En particular, para $\varepsilon_2 = \frac{|L_2|}{2}$, esto indica que

$$|g(x) - L_2| < \frac{|L_2|}{2}.$$

Note que, por la desigualdad del triángulo, ahora podemos decir que

$$|L_2| = |L_2 - g(x) + g(x)| \leq |L_2 - g(x)| + |g(x)| < \frac{|L_2|}{2} + |g(x)|.$$

Si restamos $\frac{|L_2|}{2}$ de ambos lados ahora nos da

$$\frac{|L_2|}{2} < |g(x)|,$$

así que

$$\frac{2}{|L_2|} > \frac{1}{|g(x)|}.$$

A partir de (A.8), ahora tenemos que, para $0 < |x - a| < \delta_2$,

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2} \right| = \left| \frac{L_2 - g(x)}{L_2 g(x)} \right| < \frac{2|L_2 - g(x)|}{L_2^2}. \quad (\text{A.9})$$

Además, dado cualquier $\varepsilon > 0$, hay un $\delta_3 > 0$ para el que

$$|L_2 - g(x)| < \frac{\varepsilon L_2^2}{2}, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_3.$$

A partir de (A.9), ahora tenemos que para $\delta = \min\{\delta_2, \delta_3\}$,

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2} \right| < \frac{2|L_2 - g(x)|}{L_2^2} < \varepsilon,$$

siempre que $0 < |x - a| < \delta$, como se deseaba. Ahora hemos establecido que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}.$$

A partir de (iii), ahora tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \left[f(x) \frac{1}{g(x)} \right] = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right] \left[\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} \right] \\ &= L_1 \left(\frac{1}{L_2} \right) = \frac{L_1}{L_2}, \end{aligned}$$

lo que demuestra la última parte del teorema. ■

El siguiente resultado apareció como teorema 3.3 en la sección 1.3.

TEOREMA A.2

Suponga que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y n es cualquier entero positivo. Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L},$$

Donde, para n par, asumimos que $L > 0$.

DEMOSTRACIÓN

(i) Primero damos la demostración para el caso donde $L > 0$. Puesto que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, sabemos que, dado cualquier $\varepsilon_1 > 0$, hay un $\delta_1 > 0$, de modo que

$$|f(x) - L| < \varepsilon_1, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_1.$$

Para demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$, necesitamos demostrar que, dado cualquier $\varepsilon > 0$, hay un $\delta > 0$ tal que

$$|\sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{L}| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

Observe que esto es equivalente a tener

$$\sqrt[n]{L} - \varepsilon < \sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{L} + \varepsilon.$$

Ahora, si elevamos todos los lados a la n -ésima potencia, tenemos

$$(\sqrt[n]{L} - \varepsilon)^n < f(x) < (\sqrt[n]{L} + \varepsilon)^n.$$

Al restar L de todos los términos, resulta

$$(\sqrt[n]{L} - \varepsilon)^n - L < f(x) - L < (\sqrt[n]{L} + \varepsilon)^n - L.$$

Dado que ε se considera pequeño, ahora asumimos que $\varepsilon < \sqrt[n]{L}$. Observe que en este caso, $0 < \sqrt[n]{L} - \varepsilon < \sqrt[n]{L}$. Sea $\varepsilon_1 = \min\{(\sqrt[n]{L} + \varepsilon)^n - L, L - (\sqrt[n]{L} - \varepsilon)^n\} > 0$. Entonces, como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, sabemos que hay un $\delta > 0$, tal que

$$-\varepsilon_1 < f(x) - L < \varepsilon_1, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Entonces, se sigue que

$$(\sqrt[n]{L} - \varepsilon)^n - L \leq -\varepsilon_1 < f(x) - L < \varepsilon_1 \leq (\sqrt[n]{L} + \varepsilon)^n - L,$$

siempre que $0 < |x - a| < \delta$. Al revertir la secuencia de pasos anterior obtenemos $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$, como se deseaba.

(ii) Si $L < 0$ y n es impar y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L < 0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [-f(x)] = -L > 0.$$

Entonces se deduce de la parte (i) que

$$-\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{-f(x)} = \sqrt[n]{-L} = -\sqrt[n]{L},$$

de donde se sigue el resultado.

(iii) Si $L = 0$ y n es impar y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L = 0$, entonces tenemos que dado un $\varepsilon_1 > 0$, hay un $\delta > 0$ para el que

$$|f(x)| < \varepsilon_1, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

$$\text{Entonces se sigue que } |\sqrt[n]{f(x)} - 0| = |\sqrt[n]{f(x)}| = \sqrt[n]{|f(x)|} < \varepsilon$$

si y solo si $|f(x)| < \varepsilon^n$. Si tomamos $\varepsilon_1 = \varepsilon^n$ nos da este resultado siempre que $0 < |x - a| < \delta$. ■

El siguiente resultado apareció en la sección 1.3, como teorema 3.5.

TEOREMA A.3 (Teorema del sándwich)

Suponga que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad (\text{A.10})$$

para toda x en algún intervalo (c, d) , excepto posiblemente en el punto $a \in (c, d)$ y que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$$

para algún número L . Entonces, se sigue que

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L, \quad \text{también.}$$

DEMOSTRACIÓN

Para demostrar que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$, debemos demostrar que, dado cualquier $\varepsilon > 0$, hay un $\delta > 0$, tal que

$$|g(x) - L| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Puesto que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, tenemos que, dado cualquier $\varepsilon > 0$, hay un $\delta_1 > 0$, tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_1.$$

Del mismo modo, como $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, tenemos que, dado cualquier $\varepsilon > 0$, hay un $\delta_2 > 0$, tal que

$$|h(x) - L| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Ahora elija $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces, si $0 < |x - a| < \delta$, se sigue que $0 < |x - a| < \delta_1$ y $0 < |x - a| < \delta_2$, de modo que

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |h(x) - L| < \varepsilon.$$

En forma equivalente, podemos decir que

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon \quad \text{y} \quad L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon. \quad (\text{A.11})$$

Ahora se deduce de (A.10) y (A.11) que si $0 < |x - a| < \delta$, entonces

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon,$$

lo que nos da

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

o $|g(x) - L| < \varepsilon$ y se sigue que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$, como se deseaba. ■

El siguiente resultado apareció como teorema 4.3 en la sección 1.4.

TEOREMA A.4

Suponga que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ y f es continua en L . Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right) = f(L).$$

DEMOSTRACIÓN

Para probar el resultado, debemos demostrar que, dado cualquier número $\varepsilon > 0$, hay un número $\delta > 0$ para el cual

$$|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta.$$

Como f es continua en L , sabemos que $\lim_{t \rightarrow L} f(t) = f(L)$. En consecuencia, dado cualquier $\varepsilon > 0$, hay un $\delta_1 > 0$ para el cual

$$|f(t) - f(L)| < \varepsilon, \text{ siempre que } 0 < |t - L| < \delta_1.$$

Además, como $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$, podemos hacer que $g(x)$ esté tan cerca de L como se desee simplemente haciendo que x este suficientemente cerca de a . En particular, debe haber un $\delta > 0$, para el cual $|g(x) - L| < \delta_1$ siempre que $0 < |x - a| < \delta$. Ahora se sigue que, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|g(x) - L| < \delta_1$, de modo que

$$|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon,$$

como se deseaba. ■

El siguiente resultado apareció como teorema 5.1 en la sección 1.5.

TEOREMA A.5

Para cualquier número racional $t > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^t} = 0,$$

Donde, para el caso en el que $x \rightarrow -\infty$, asumimos que $t = \frac{p}{q}$, y q es impar.

DEMOSTRACIÓN

Primero probamos que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^t} = 0$. Para hacerlo, debemos demostrar que, dado cualquier $\varepsilon > 0$, hay una $M > 0$ para la cual $\left| \frac{1}{x^t} - 0 \right| < \varepsilon$, siempre que $x > M$. Dado que $x \rightarrow \infty$, podemos tomar x como positiva, de modo que

$$\left| \frac{1}{x^t} - 0 \right| = \frac{1}{x^t} < \varepsilon,$$

que es equivalente a

$$\frac{1}{x} < \varepsilon^{1/t}$$

o

$$\frac{1}{\varepsilon^{1/t}} < x.$$

Tenga en cuenta que si consideramos que M es cualquier número mayor que $\frac{1}{\varepsilon^{1/t}}$, tendremos $\left| \frac{1}{x^t} - 0 \right| < \varepsilon$, siempre que $x > M$, como se deseaba.

Para el caso en que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^t} = 0$, debemos demostrar que, dado cualquier $\varepsilon > 0$, hay una $N < 0$ para la cual $\left| \frac{1}{x^t} - 0 \right| < \varepsilon$, siempre que $x < N$. Dado que $x \rightarrow -\infty$, podemos tomar x como negativa, de modo que

$$\left| \frac{1}{x^t} - 0 \right| = \frac{1}{|x^t|} < \varepsilon,$$

que es equivalente a

$$\frac{1}{|x|} < \varepsilon^{1/t}$$

o

$$\frac{1}{\varepsilon^{1/t}} < |x| = -x,$$

ya que $x < 0$. Al multiplicar ambos lados de la desigualdad por -1 , obtenemos

$$-\frac{1}{e^{1/t}} > x.$$

Tenga en cuenta que si tomamos a N como un número menor que $-\frac{1}{e^{1/t}}$, tendremos $\left|\frac{1}{x^t} - 0\right| < \varepsilon$, siempre que $x < N$, como se deseaba. ■

En la sección 2.10 presentamos el teorema de Rolle (teorema 10.1), pero solo dimos una idea gráfica de la demostración. Ahora, con la adición del teorema del valor extremo, podemos ofrecer una demostración completa de este resultado.

TEOREMA A.6 (Teorema de Rolle)

Suponga que f es continua en el intervalo $[a, b]$, diferenciable en el intervalo (a, b) y que $f(a) = f(b)$. Entonces hay un número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

DEMOSTRACIÓN

Hay tres casos a considerar aquí.

- (i) Si $f(x)$ es constante en $[a, b]$, entonces $f'(x) = 0$ en todo (a, b) .
- (ii) Suponga que $f(x) < f(a)$, para alguna $x \in (a, b)$. Como f es continua en $[a, b]$, según el teorema del valor extremo (teorema 3.1 en la sección 3.3) tenemos que f alcanza un mínimo absoluto en $[a, b]$. Como $f(x) < f(a) = f(b)$, para alguna $x \in (a, b)$, el mínimo absoluto se produce en algún punto $c \in (a, b)$. Luego, según el teorema de Fermat (teorema 3.2 en la sección 3.3), c debe ser un número crítico de f . Finalmente, como f es diferenciable en (a, b) , debemos tener $f'(c) = 0$.
- (iii) Del mismo modo, suponga que $f(x) > f(a)$, para alguna $x \in (a, b)$. Entonces, al igual que en (ii), por el teorema del valor extremo tenemos que f alcanza un máximo absoluto en $[a, b]$. Como $f(x) > f(a) = f(b)$, para alguna $x \in (a, b)$, el máximo absoluto ocurre en algún punto $c \in (a, b)$. Entonces, según el teorema de Fermat, debemos tener $f'(c) = 0$. ■

En la sección 3.2 demostramos la regla de l'Hôpital solo para un caso especial. Aquí presentamos una demostración general para el caso $\frac{0}{0}$. Primero, necesitamos la siguiente generalización del teorema del valor medio.

TEOREMA A.7 (Teorema del valor medio generalizado)

Suponga que f y g son continuas en el intervalo $[a, b]$ y diferenciables en el intervalo (a, b) , y que $g'(x) \neq 0$ para toda x en (a, b) . Entonces, hay un número $z \in (a, b)$, tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Tenga en cuenta que el teorema del valor medio (teorema 10.4 en la sección 2.10) es simplemente el caso especial del teorema A.7 donde $g(x) = x$.

DEMOSTRACIÓN

Primero, observe que dado que $g'(x) \neq 0$, para toda x en (a, b) , debemos tener que $g(b) - g(a) \neq 0$. Esto se deduce del teorema de Rolle (teorema A.6), dado que si $g(a) = g(b)$, habría algún número $c \in (a, b)$ para el cual $g'(c) = 0$. Ahora, defina

$$h(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x).$$

Note que h es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) , ya que tanto f como g son continuas en $[a, b]$ y diferenciables en (a, b) . Además, tenemos

$$\begin{aligned} h(a) &= [f(b) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a) \\ &= f(b)g(a) - g(b)f(a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{y} \quad h(b) &= [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) \\ &= g(a)f(b) - f(a)g(b), \end{aligned}$$

de modo que $h(a) = h(b)$. En vista de esto, el teorema de Rolle dice que debe haber un número $z \in (a, b)$ para el cual

$$0 = h'(z) = [f(b) - f(a)]g'(z) - [g(b) - g(a)]f'(z)$$

$$\text{o} \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(z)}{g'(z)},$$

como se deseaba. ■

Ahora podemos dar una demostración general de la regla de l'Hôpital para el caso $\frac{0}{0}$. La demostración del caso $\frac{\infty}{\infty}$ se puede encontrar en un texto más avanzado.

TEOREMA A.8 (Regla de l'Hôpital)

Suponga que f y g son diferenciables en el intervalo (a, b) , excepto posiblemente en algún punto fijo $c \in (a, b)$ y que $g'(x) \neq 0$, en (a, b) , excepto posiblemente en $x = c$.

Suponga además que $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ y que $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (o $\pm\infty$). Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

DEMOSTRACIÓN

(Caso $\frac{0}{0}$). En este caso, tenemos que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$. Defina

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq c \\ 0 & \text{si } x = c \end{cases} \quad \text{y} \quad G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq c \\ 0 & \text{si } x = c \end{cases}.$$

Observe que $\lim_{x \rightarrow c} F(x) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 = F(c)$

y $\lim_{x \rightarrow c} G(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0 = G(c)$,

de modo que tanto F como G son continuas en todo (a, b) . Además, observe que para $x \neq c$, $F'(x) = f'(x)$ y $G'(x) = g'(x)$ y, por consiguiente, tanto F como G son diferenciables en cada uno de los intervalos (a, c) y (c, b) . Primero consideramos el intervalo (c, b) . Observe que F y G son continuos en $[c, b]$ y diferenciables en (c, b) y, por lo tanto, según el teorema del valor medio generalizado, para cualquier $x \in (c, b)$, tenemos que hay algún número z , con $c < z < x$, para el cual

$$\frac{F'(z)}{G'(z)} = \frac{F(x) - F(c)}{G(x) - G(c)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{f(x)}{g(x)},$$

donde hemos usado el hecho de que $F(c) = G(c) = 0$. Note que conforme $x \rightarrow c^+$, $z \rightarrow c^+$ también, ya que $c < z < x$. Al tomar el límite cuando $x \rightarrow c^+$, ahora tenemos

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z \rightarrow c^+} \frac{F'(z)}{G'(z)} = \lim_{z \rightarrow c^+} \frac{f'(z)}{g'(z)} = L.$$

De manera similar, al enfocarnos en el intervalo (a, c) , podemos demostrar que $\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$, lo que demuestra que $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ (ya que los dos límites laterales coinciden). ■

El siguiente teorema corresponde al teorema 6.1 en la sección 8.6.

TEOREMA A.9

Dada cualquier serie de potencias, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x - c)^k$, existen exactamente tres posibilidades:

- (i) la serie converge para toda $x \in (-\infty, \infty)$ y el radio de convergencia es $r = \infty$;
- (ii) la serie converge *solo* para $x = c$ (y diverge para todos los demás valores de x) y el radio de convergencia es $r = 0$; o
- (iii) la serie converge para $x \in (c - r, c + r)$ y diverge para $x < c - r$ y para $x > c + r$, para algún número r con $0 < r < \infty$.

Para probar el teorema A.9, primero presentamos y demostramos dos resultados más simples.

TEOREMA A.10

- (i) Si la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ converge para $x = a \neq 0$, entonces también converge para toda x con $|x| < |a|$.
- (ii) Si la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ diverge para $x = d$, entonces también diverge para toda x con $|x| > |d|$.

DEMOSTRACIÓN

(i) Suponga que $\sum_{k=0}^{\infty} b_k a^k$ converge. Entonces, según el teorema 2.2 de la sección 8.2, $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k a^k = 0$. Para que esto ocurra, debemos ser capaces de hacer $|b_k a^k|$ tan pequeño como se desee, simplemente haciendo que k sea suficientemente grande. En particular, debe haber un número $N > 0$, tal que $|b_k a^k| < 1$, para toda $k > N$. Entonces, para $k > N$, debemos tener

$$|b_k x^k| = \left| b_k a^k \left(\frac{x^k}{a^k} \right) \right| = |b_k a^k| \left| \frac{x}{a} \right|^k < \left| \frac{x}{a} \right|^k.$$

Si $|x| < |a|$, entonces $\left| \frac{x}{a} \right| < 1$ y, por lo tanto, $\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{x}{a} \right|^k$ es una serie geométrica convergente.

Luego, a partir de la prueba de la comparación (teorema 3.3 en la sección 8.3), se sigue que

$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k x^k|$ converge y, por lo tanto, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ converge absolutamente.

(ii) Suponga que $\sum_{k=0}^{\infty} b_k d^k$ diverge. Observe que si x es cualquier número con $|x| > |d|$, entonces $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ debe divergir, ya que si convergiera, tendríamos por la parte (i) que $\sum_{k=0}^{\infty} b_k d^k$ también convergería, lo que contradice nuestro supuesto. ■

Enseguida, enunciaremos y demostramos una versión un poco más sencilla del teorema A.9.

TEOREMA A.11

Dada cualquier serie de potencias, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, existen exactamente tres posibilidades:

- (i) la serie converge para *toda* $x \in (-\infty, \infty)$ y el radio de convergencia es $r = \infty$;
- (ii) la serie converge *solo* para $x = 0$ (y diverge para todos los demás valores de x) y el radio de convergencia es $r = 0$; o
- (iii) la serie converge para $x \in (-r, r)$ y diverge para $x < -r$ y $x > r$, para algún número r con $0 < r < \infty$.

DEMOSTRACIÓN

Si ni (i) ni (ii) son verdaderos, entonces debe haber números distintos de cero a y d , tales que la serie converja para $x = a$ y diverja para $x = d$. A partir del teorema A.10, observe que $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ diverge para todos los valores de x con $|x| > |d|$. Defina el conjunto S como el conjunto de todos los valores de x para los que la serie converge. Como la serie converge para $x = a$, S no está vacío. Además, $|d|$ es un límite superior en S , ya que la serie diverge para todos los valores de x con $|x| > |d|$. Por el axioma de completitud (vea la sección 8.1), S debe tener un límite inferior r . Entonces, si $|x| > r$, entonces $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ diverge. Además, si $|x| < r$, entonces $|x|$ no es un límite superior para S y debe haber un número t en S con $|x| < t$. Como $t \in S$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$ converge y, por el teorema A.10, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ converge dado que $|x| < t \leq |t|$. Esto demuestra el resultado. ■

Ahora podemos demostrar el resultado original (teorema A.9).

DEMOSTRACIÓN (DEL TEOREMA A.9)

Sea $t = x - c$ y la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - c)^k$ se convierte simplemente en $\sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k$. Por el teorema A.11, sabemos que la serie converge para toda t (es decir, para toda x) o solo para $t = 0$ (esto es, solo para $x = c$), o bien hay un número $r > 0$ tal que la serie converge para $|t| < r$ (es decir, para $|x - c| < r$) y diverge para $|t| > r$ (esto es, para $|x - c| > r$). Esto demuestra el resultado original. ■

